

## Angewandte Beispiele zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

R. Laussersmayer, Imst

### 1. Theoretische Grundlagen

Wahrscheinlichkeitsrechnung ermöglicht die Ableitung von neuen Wahrscheinlichkeitswerten aus bereits vorgegebenen. Jede Ermittlung von Wahrscheinlichkeitswerten erfolgt aber letztlich auf der Grundlage einer bestimmten Definition von Wahrscheinlichkeit. Die Definition des Begriffes Wahrscheinlichkeit ist ein sehr schwieriges und heute noch nicht befriedigend gelöstes Grundlagenproblem. Den zahlreichen verschiedenen Definitionen von Wahrscheinlichkeit entsprechen natürlich verschiedene Interpretationen von Wahrscheinlichkeit und damit auch verschiedene Wahrscheinlichkeitstheorien. Die einzelnen Wahrscheinlichkeitstheorien unterscheiden sich durch:

- Anwendungsbereich,
- Art der Wahrscheinlichkeitsaussagen,
- Methoden zur Gewinnung von Wahrscheinlichkeitswerten,
- Zweck und Ziel der jeweiligen Theorie,
- Vor- und Nachteile.

Jede Interpretation (Definition) von Wahrscheinlichkeit "ist einzeln genommen unzureichend. Für ein volles Verständnis des Wesens der Wahrscheinlichkeit ist ihre Synthese erforderlich."

(1). Als Folgerungen für den Unterricht ergeben sich deshalb:

- Unmöglichkeit der Umgehung der Interpretationsfrage,
- Unmöglichkeit der Beschränkung auf eine Definition (Theorie),
- Notwendigkeit der Befähigung der Schüler zur Unterscheidung (Erkennung) der allerwichtigsten Interpretations- (Definitions-) arten,
- Notwendigkeit der Vereinfachung (Reduktion auf wenige wichtige Definitionsarten).

Vorschlag für eine ganz grobe Klassifikation:

Man kann den Wahrscheinlichkeitsbegriff klassifizieren je nach Art der Interpretation oder je nach Art der Ermittlung von Wahrscheinlichkeitswerten. Beide Einteilungsprinzipien führen im wesentlichen zur selben Klassifikation:

(A) nach Art der Interpretation:

(1) Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit (objektive Wahrscheinlichkeit),

(2) Wahrscheinlichkeit als Überzeugtheitsgrad des Subjekts (subjektive Wahrscheinlichkeit):

a) klassische Wahrscheinlichkeit (Bernoulli, Laplace),

b) subjektiv-personalistische Wahrscheinlichkeit (Pascal, Savage).

(B) nach Art der Ermittlung von Wahrscheinlichkeitswerten:

(1) ante factum (a priori):

a) klassische Wahrscheinlichkeit (Berechnung),

b) subjektiv-personalistische Wahrscheinlichkeit (Schätzung),

(2) post factum (a posteriori): relative Häufigkeit (Berechnung, Schätzung)

Für den Unterricht empfehlen sich folgende vereinfachte Definitionen der drei für die Praxis wichtigsten Spielarten des Wahrscheinlichkeitsbegriffes:

(I) Klassische Wahrscheinlichkeit:

Wenn bei einem Versuch  $N$  gegenseitig unverträgliche und gleichwahrscheinliche Ereignisse eintreten können und  $m$  von diesen Ereignissen eine Eigenschaft  $E$  haben, so ist  $P(E) = m/N$ .

Anmerkungen:

- $P(E)$  kann dabei interpretiert werden als Maß für den Überzeugtheitsgrad eines Subjekts (subjektive Wahrscheinlichkeit!).

- Vorteil: Berechenbarkeit
- Nachteil: Schwierigkeit bei Definition von "gleichwahrscheinlich" (Zirkeldefinition!), Nichtanwendbarkeit von "Symmetrieüberlegungen" auf Naturprozesse (z.B. Knabengeburt !)

(II) Statistische Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit):

Wenn ein Prozess (Versuch)  $n$ -mal (sehr oft!) unter gleichen Bedingungen wiederholt werden kann und dabei ein bestimmtes Ergebnis (Ereignis)  $m$ -mal eintritt, so ist die relative Häufigkeit  $m/n$  dieses Ereignisses annähernd gleich  $P(E)$ .

Anmerkungen:

- $m/n$  ist somit ein Schätzwert für  $P(E)$ !
- Je größer die Anzahl der Versuche, desto geringer wird die Abweichung vom jeweils erreichten Wert  $m/n$ .

(III) Subjektive Wahrscheinlichkeit:

$P(E)$  ist ein Maß für den Grad der Überzeugtheit, mit der eine bestimmte Person an das Eintreten eines unsicheren Ereignisses bzw. an die Richtigkeit einer bestimmten Aussage glaubt.

Anmerkungen:

- Vorteil: Wiederholbarkeit ist nicht gefordert.  $P(E)$  kann auch für ein einmaliges Ereignis geschätzt werden.
- Nachteil: Schätzung (nicht Berechnung)!

Zwischen diesen drei Definitionsarten gibt es keine starren Grenzen, sondern vielmehr zahlreiche wichtige Zusammenhänge. Z.B.:

- historische Entwicklung (I-III)
- Physik (I-II)
- Risikoanalyse (II-III)

2. Risiko-Analyse von soziotechnischen Systemen

(Beispiel: Sicherheit von Kernkraftwerken)

"Den Stand der Entwicklung heute charakterisiert ... die Tatsache,

daß man nun Wahrscheinlichkeitsabschätzungen für Ereignisse verlangt, von denen man hofft, daß sie nie eintreten - siehe etwa den GAU bei Atomkraftwerken. Bezeichnend: Nach Harrisburg wird ein Wahrscheinlichkeitstheoretiker, der Präsident des Dartmouth College, George B. Kemeny, zum Vorsitzenden einer Kommission ernannt, welche die Sicherheitsmaßnahmen und -berechnungen in Kernkraftwerken kritisch überprüfen soll." Diese bemerkenswerte Feststellung machte Univ. Prof. Dr. Ferschl, München, bei seinem Einleitungsreferat zum Festsymposium "Die Statistik in den Wissenschaften", das am 6.11.1979 aus Anlaß des Jubiläums "150 Jahre amtliche Statistik in Österreich" in Wien stattfand (2)

Daß es sich bei der Angabe der Wahrscheinlichkeit von Unfällen in Kernkraftwerken (z.B. eines GAU) um subjektive Wahrscheinlichkeiten handelt, kommt auch in den beiden folgenden Feststellungen aus dem berühmten Rasmussen-Bericht zum Ausdruck:

"Die Reaktorsicherheitsstudie wurde von der US AEC in Auftrag gegeben, um damit die für die Öffentlichkeit im Zusammenhang mit potentiellen Unfällen in kommerziellen Kernkraftwerken der heute üblichen Bauart entstehenden Risiken abzuschätzen. ... Die Risiken konnten nicht gemessen, sondern mußten geschätzt werden, denn obwohl zur Zeit ca. 50 derartige Anlagen in Betrieb sind, hat sich bislang kein einziger nuklearer Unfall ereignet, der zu nennenswerten Freisetzungen radioaktiver Stoffe ... führte. Viele der bei dieser Abschätzung angewandten Methoden beruhen auf Verfahren, die vom amerikanischen Verteidigungsministerium und von der NASA in den letzten zehn Jahren entwickelt wurden ..."

(3). - "Unter Anwendung der in den letzten Jahren zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit solcher Unfälle entwickelten Methoden wurde eine Eintrittswahrscheinlichkeit für jeden denkbaren Unfall mit Kernschmelzen bestimmt. Diese Wahrscheinlichkeiten

wurden kombiniert und ergaben die Gesamtwahrscheinlichkeit des Kernschmelzens. Der Wert liegt bei 1 : 20.000 pro Reaktor und Jahr". (4)

### 2.1. Einfache Zahlen(bei)spiele:

Zunächst soll an einigen einfachen Zahlen(bei)spielen gezeigt werden, daß die folgende Überaus scharfe Kritik am Umgang der Physiker mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff, die einer der besten Kenner dieser Problematik, T.L.Fine, Übt, sicher nicht un-  
rechtigt ist."... die offensichtlich naiven Ansichten der Physiker über den Begriff Wahrscheinlichkeit sind eine Mischung aus klassischen, subjektiven und statistischen (finite relative-frequency) Elementen ... Der Grund für den scheinbaren Erfolg dieser naiven Ansichten ist nicht ganz verständlich ... es ist möglich, daß die Physik bei ihren Anwendungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes Glück gehabt hat, zumindest bisher." (5)

#### Erstes Beispiel:

"Der Wert (für die Gesamtwahrscheinlichkeit des Kernschmelzens) liegt bei 1 : 20.000 pro Reaktor und Jahr. Wenn 100 Reaktoren in Betrieb wären, was in den USA um 1980 der Fall sein dürfte, heißt das, daß die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Unfall 1 : 200 pro Jahr beträgt." (6)

Hier mischen sich offensichtlich in die zunächst subjektive Wahrscheinlichkeit (1 : 20.000) statistische Elemente!

Dieser höchst-offiziellen (Rasmussen-Bericht!) Interpretationsweise folgend, kann man sagen: 1978 waren auf der ganzen Welt 220 Kernkraftwerke konzessioniert und weitere 320 im Bau oder bestellt. Somit:  $P(\text{Kernschmelzen}) = 540 \times (1/20.000) = 0,03 = 3\%$ . Auf die Grenzen dieser Vorgangsweise (Grenzen der statistischen Interpretation) wird - mit Recht- im Rasmussen-Bericht hingewiesen: "Man könnte versucht sein, die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Reaktorunfalls pro Anlage mit 1000 zu multiplizieren,

um so die Wahrscheinlichkeit eines Unfalls im Jahr 2000 zu ermitteln. Diese Rechnung ist jedoch nicht stichhaltig, denn man geht dabei davon aus, daß die in den nächsten 25 Jahren gebauten Reaktoren den heute gebauten Typen entsprechen." (7)

### Zweites Beispiel:

Im Hinblick auf die eben zitierte Warnung des Rasmussen-Berichts vor einer "nicht stichhaltigen" statistischen Interpretation ("Wahrscheinlichkeit mal Gesamtpopulation = Anzahl der Fälle") des Wahrscheinlichkeitswertes 1 : 20.000 ist es erstaunlich, daß sich eine so angesehene Fachzeitschrift wie SCIENTIFIC AMERICAN keineswegs um diese Warnung kümmert. In einem Beitrag zur Frage der Sicherheit von Kernkraftwerken ("Wie sicher?", September 1975, S. 53) wird berichtet, daß nach dem Rasmussen-Bericht die Wahrscheinlichkeit für Kernschmelzen mit vollständiger Freisetzung der Radioaktivität sehr klein ist, nämlich etwa  $6 \times 10^{-6}$  ("six chances in a million") pro Reaktor und Jahr. Dieser Wert wird sodann wie folgt interpretiert: "In einer Welt mit 1000 Reaktoren führt dies zu einer Häufigkeit von ca. einem katastrophalen Unfall in 160 Jahren". Hinter dieser Auslegung steht offensichtlich folgende Überlegung: Für 1 Kernkraftwerk bedeutet die Wahrscheinlichkeit  $6 \times 10^{-6}$ : 1 GAU in 160 000 Jahren ( $1/160\ 000 = 6,3 \times 10^{-6}$ ). Hier ist natürlich nur eine subjektive Interpretation möglich (160 000 Jahre!). Für 1000 Kernkraftwerke ist das Eintreten eines GAU 1000-mal wahrscheinlicher als für 1 Kernkraftwerk:  $P(\text{GAU bei 1000 KKW}) = 1000 \times (1/160\ 000) = 1/160 = 1 \text{ GAU in } 160 \text{ Jahren.}$

Für die hinter dieser Rechnung stehende statistische Interpretation (Wahrscheinlichkeit = relative Häufigkeit; Wahrscheinlichkeit mal Gesamtpopulation = Anzahl der Fälle) finden sich übrigens im Rasmussen-Bericht noch zahlreiche andere ähnliche Beispiele.

### Drittes Beispiel:

Die soeben zitierte Interpretation des Wahrscheinlichkeitswertes  $6 \times 10^{-6}$  legt folgende analoge Überlegungen nahe:

Da die Lebensdauer von Kernkraftwerken sicher nicht mehr als 40 Jahre beträgt, ist es sinnvoll, den selben Vorgang ("Wahrscheinlichkeit mal Gesamtpopulation = Anzahl der Fälle") nochmals durchzuführen, um zur Bezugszahl "40 Jahre" zu kommen:  $P$  (GAU bei 4000 Kernkraftwerken) =  $4000 \times 1/160\,000 = 1/40 = 1$  GAU in 40 Jahren. Für diesen letzten Wert ist nun wieder die statistische Interpretation, d.h. eine Interpretation im Sinne relativer Häufigkeit möglich und naheliegend.

Schließlich (analog!): Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines GAU ist bei 1 Kernkraftwerk 4000-mal geringer als bei 4000 Kernkraftwerken, also  $P$  (GAU bei 1 KW) =  $1/4000$  GAU in 40 Jahren (subjektive Wahrscheinlichkeit!). Für die rund 200 heute arbeitenden Kernkraftwerke dagegen wäre  $P$  (GAU) =  $200 \times 1/4000$  in 40 Jahren oder 5 % in 40 Jahren (Interpretation ?).

#### 4. Die Methoden der Rasmussen-Gruppe zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitswerte für Kernkraftwerks-Unfälle:

In der Rasmussen-Studie wurden zwei verschiedene Techniken zur Ermittlung von möglichen Unfallmechanismen und ihrer Wahrscheinlichkeiten verwendet:

- (I) Störablaufanalysen (event-tree-analysis),
- (II) Fehlerbaumanalysen (fault-tree-analysis).

Störablaufanalysen und ihre Umkehrung, die Fehlerbaumanalysen, verwenden eine Art Binär-Logik, bei der angenommen wird, daß ein Ereignis entweder eintritt oder nicht, daß ein Bestandteil entweder funktioniert oder nicht. Ereignisse, bei denen etwas schlecht funktioniert (aber funktioniert), werden durch keine der beiden Methoden erfaßt. Hierin liegt eine ihrer wesentlichsten Schwächen,

was sowohl vom deutschen Institut für Reaktorsicherheit wie auch von der Studiengruppe für die Sicherheit von Leichtwasserreaktoren der Amerikanischen Physikalischen Gesellschaft scharft kritisiert wurde:

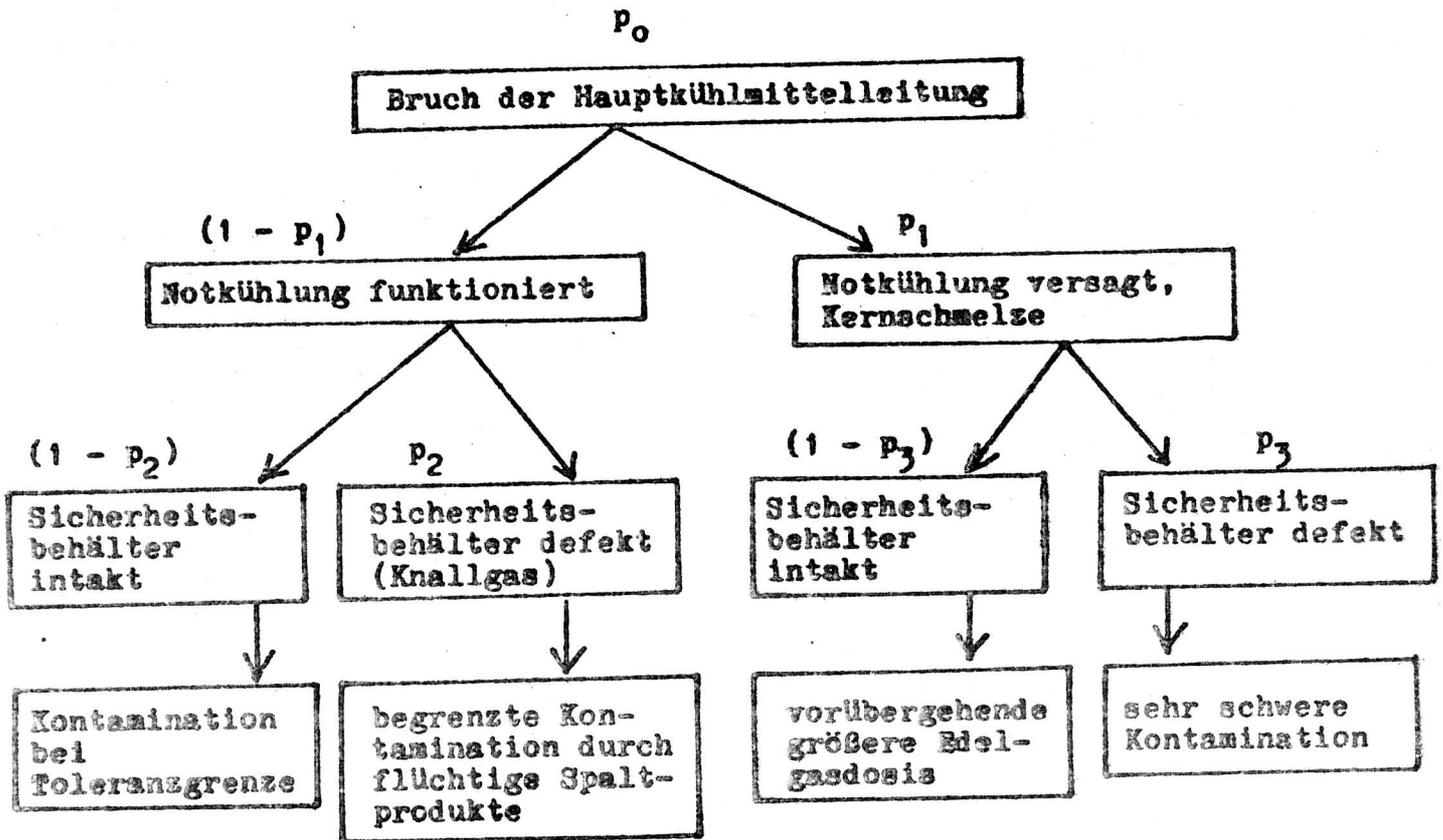
- "Störablauf- und Fehlerbaumanalysen werfen zwar keine Probleme als Methoden auf, die Schwierigkeiten liegen vielmehr in der richtigen Systemerfassung. In diesem Zusammenhang ist die Frage nach der Berücksichtigung von Teilausfällen von Sicherheitssystemen zu stellen, die ungünstigere Auswirkungen als völliger Ausfall haben können." (8)

- "Bei der Abschätzung der Sicherheit von Kernkraftwerken darf man nicht in den Fehler verfallen, eine komplizierte Situation auf ein einfaches Schwarz-Weiß-Bild von Ja/Nein zu reduzieren." ("In assessing safety, one must avoid this fallacy of reducing a complicated situation to the simple black-and-white picture of yes/no". (9)

(1) Störablaufanalysen (event-tree-("Ereignis-Baum")analysis):

- Man beginnt mit einem auslösenden Ereignis (Wahrscheinlichkeit  $p_0$ ). Beispiel: Versagen im Kühlsystem (Pumpenfehler, Rohrbruch u.ä.).
- Man folgt den Folgen des auslösenden Ereignisses durch eine große Zahl von möglichen Ereignisketten, wobei jeder Verzweigung eine bestimmte Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet wird.
- Das Ergebnis ist eine lange Liste möglicher Folgen des auslösenden Ereignisses, von denen jede einen bestimmten Wahrscheinlichkeitswert hat.

**Beispiel: (10)**



Damit ergeben sich für diesen äußerst vereinfachten "Ereignis-Baum" folgende End-Wahrscheinlichkeiten:

$$W_1 \text{ (Beherrschung des GAU)} = p_0 \cdot (1-p_1) \cdot (1-p_2)$$

$$W_2 \text{ (Eintreten des GAU)} = p_0 \cdot p_1 \cdot p_3$$

5. Die Problematik (Unsicherheit) der mit solchen Störablaufanalysen errechneten Risiken (Unfallwahrscheinlichkeiten):

- Die Festlegung der einzelnen Wahrscheinlichkeitswerte ist sehr schwierig. Sie kann meist nur auf Grund subjektiver Abschätzung (subjektive Wahrscheinlichkeit!) durch erfahrene Industrieexperten erfolgen. Nach dem Rasmussen-Bericht lassen sich "genäherte Ungenauigkeiten für nukleare Ereignisse ... durch Faktoren 1/4 und 4 hinsichtlich der Auswirkungen und durch Faktoren 1/5 und 5 hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit schätzungsweise angeben." (11) Heute sind aber selbst die Experten der NUCLEAR REGULATORY COMMISSION (NUREG) der Meinung, daß die

Unsicherheiten in der Ermittlung der Wahrscheinlichkeitswerte wesentlich größer sind: "... die detaillierte Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Reaktorunfalls mit Hilfe der im Rasmussen-Bericht verwendeten Fehlerbaum-/Störablauf-Technik ist überaus schwierig. Die Risiken-Prüfungs-Kommission (der NUREG) kam nach eingehendem Studium des Problems zu dem Schluß, daß die Berechnungen der Reaktor-Sicherheits-Studie (Rasmussen-Bericht) nicht so gut waren, wie behauptet wurde, daß es aber unmöglich ist, festzustellen, ob es insgesamt ein Vorurteil in positiver oder in negativer Richtung gab. Mit anderen Worten: man könnte nicht sagen, ob die Wahrscheinlichkeit eines großen Reaktorunfalls größer oder kleiner ist, als die in der Reaktor-Sicherheits-Studie errechnete Wahrscheinlichkeit; das Einzige, was man sagen kann, ist, daß die Unsicherheit der Berechnung viel größer ist, als im Rasmussen-Bericht angenommen wurde. Dies ist keine besonders hilfreiche Erkenntnis, aber sie beschreibt den wahren Stand der Dinge." (12)

- Da die einzelnen Wahrscheinlichkeitswerte (z.B.  $p_0$ ,  $p_1$ , ...) nicht eindeutig festlegbar sind, muß man die Berechnung der Endwerte für zufällig ausgewählte Ausgangswerte ("random numbers within the range of certainty for each fault") mit dem Computer viele Male durchspielen und bekommt dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit bestimmter Streuung (Monte-Carlo-Methode!).

- Da jedes der in einem Ereignisbaum dargestellten Ereignisse wieder in sehr viele, oft in komplizierter Weise zusammenhängende Teilereignisse zerfällt, ist die tatsächliche Berechnung der Endwahrscheinlichkeiten auch für die größten Computer nur unter sehr stark vereinfachenden Annahmen möglich.

- In der Rasmussen-Studie wurden die Wahrscheinlichkeiten von

"Tausenden von möglichen Unfallabläufen geprüft" (13) und "die gesundheitlichen Folgen und die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von 140 000 möglichen Kombinationen des Umfangs einer radioaktiven Freisetzung, der Witterung und der betroffenen Bevölkerung berechnet." (14) Die bei derartigen Rechnungen auftretenden Fehlerkombinationen und Fehlerfortpflanzungen haben aber Dimensionen, für die es in der Fehlerrechnung keine wirklich adäquaten Methoden gibt. Es ist daher nur zu verständlich, daß die von der Amerikanischen Physikalischen Gesellschaft (APS) eingesetzte Studiengruppe über die Sicherheit von Leichtwasserreaktoren zu diesen Wahrscheinlichkeitsberechnungen des Rasmussen-Berichts wenig Vertrauen hat: "... wir erkennen an, daß die Ereignisbaum-/Fehlerbaum-Analyse verdienstvoll sein kann bei der Herausstellung der relativen Stärken und Schwächen von Reaktorsystemen ... Jedoch haben wir auf Grund unserer Erfahrung mit Problemen dieser Art, bei denen sehr kleine Wahrscheinlichkeiten auftreten, kein Vertrauen zu den derzeit errechneten Werten der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zweige (der Fehler-/Ereignisbäume)." (15)

(II) Fehlerbaumanalysen (fault-tree-analysis):

Fehlerbaumanalysen verlaufen in genau entgegengesetzter Richtung zu Störablaufanalysen: man verfolgt zeitlich nach rückwärts die vielen möglichen Wege, die zu einem bestimmten Defekt hätten führen können. Jedem der möglichen Wege werden durch Schätzung subjektive Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Die damit verbundenen Unsicherheiten sind ähnlich denen, die bei Störablaufanalysen auftreten.

Abschließend sei noch bemerkt, daß es recht fragwürdig ist, die aus Störablauf- oder Fehlerbaumanalysen ermittelten subjektiven Wahrscheinlichkeiten mit gesellschaftlichen Risiken zu vergleichen, die als primitive relative Häufigkeiten (statistische Wahrschein-

lichkeiten) errechnet wurden. So z.B. wird im Rasmussen-Bericht die jährliche Anzahl von Straßenverkehrstoten in den USA durch die Gesamtbevölkerung dividiert und das Ergebnis (1/4000) als "durchschnittliches Sterblichkeitsrisiko (Wahrscheinlichkeit für den Einzelnen pro Jahr)" bezeichnet. Dieser Wert 1/4000 wird sodann als Vergleichswert zur Abschätzung der gesellschaftlichen Risiken von Kernkraftwerken verwendet. (16). Ob diese Vorgangsweise zur besseren Beurteilung der Akzeptanz nuklearer Risiken durch die Öffentlichkeit sehr viel beiträgt, bleibe dahingestellt.

Literaturangaben:

- (1) Gnedenko, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1958, 2.Aufl., S.14
- (2) Mitteilungsblatt der Österreichischen Gesellschaft für Statistik und Informatik, 9.Jg., Heft Nr.36, Dez.1979, S.153 f
- (3) Der Rasmussen-Bericht WASH-1400 (NUREG 75/014), Übersetzung der Kurzfassung, IRS Stellungnahmen zu Kernenergiefragen, IRS-S-13 (Februar 1976), Institut für Reaktorsicherheit der Technischen Überwachungs-Vereine e.V., 5000 Köln 1, S.1
- (4) a.a.O., S.14 f
- (5) T.L.Fine, Theories of Probability, N.Y., 1973, S.242
- (6) Rasmussen-Bericht, a.a.O., S.15
- (7) a.a.O., S.23
- (8) IRS Stellungnahmen zu Kernenergiefragen, IRS-S-13 (Februar 1976), S.6
- (9) Report to the American Physical Society by the study group on light-water reactor safety, Reviews of Modern Physics, Vol.47, Suppl.No.1, 1975, p.9
- (10) nach W.Oldekop, Einführung in die Kernreaktor- und Kernkraftwerkstechnik, Teil II, München, 1975, S.186

- (11) Rasmussen-Bericht, a.a.O., S.3
- (12) H.L.Lewis, The Safety of Fission Reactors, Sc.Am., March 1980,  
Vol.242, No.3, p.42
- (13) Rasmussen-Bericht, a.a.O., S.23
- (14) a.a.O., S.17
- (15) a.a.O., p.5
- (16) Rasmussen-Bericht, a.a.O., S.6

Dir.Mag.Roman Laussermayer  
Bundesgymnasium Imst/Tirol